佐々木磁場の Legendre 軌道に沿った
磁性ヤコビ場の共役値と焦値

名古屋工業大学　大学院工学研究科博士後期課程工学専攻
青木侑省 (Yusei AOKI) *

概要

複素空間形内の良い実超曲面である η 全臍的実超曲面上にはケーラー多様体の複素構造から誘導される概接触計量構造が入る。この構造のもと、速度ベクトルと加速度ベクトルが複素一次元を張る曲線族である軌道を考える。今回はこの軌道の変分の様子を調べた。特に、多様体の幾何学的な性質を数値的に表す重要な概念の１つである共役値、焦値について調べた。

1　導入

これまで、リーマン多様体の形状を考察する主な手法として、多くの研究者によって測地線の性質が調べられてきた。そこで著者は測地線を幾何構造に付随する磁場を用いて一般化し、より広い対象となる曲線族を考えることで、多様体の形状と幾何構造の両者を含めた情報が得られるのではないかとして考察を進めている。

正則断面曲率 c に対して、複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$、複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$、複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ の３つをまとめて複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ と呼ぶ。また、非平坦な複素空間形内の実超曲面で複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の半径 r の測地球面 $G(r)$、複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ 内のホロ球面 HS、半径 r の測地球面 $G(r)$、複素超曲面 $\mathbb{C}H^{n-1}(c)$ を芯とする半径 r の管 $T(r)$ をまとめて η 全臍的実超曲面という。今回はこの η 全臍的実超曲面上の特別な軌道を対象に考察を行った。特に、この軌道の変分の様子を調べることで多様体の性質を数値的に表現した共役値、焦値と呼ばれるものが得られた。

2　実超曲面上の佐々木磁場

ケーラー多様体 $\widetilde{M}$ とその複素構造 J、リーマン計量 $\langle\ ,\ \rangle$ をとる。$\widetilde{M}$ の実超曲面 M には $\widetilde{M}$ 上の複素構造 J から誘導される概接触計量構造 $(\phi, \xi, \eta, \langle\ ,\ \rangle)$ が入る。M 上の単位法線ベクトル $\mathcal{N}$ に対して、ベクトル場 ξ は $\xi = -J\mathcal{N}$ で定義される。１形式 η は $\eta(v) = \langle v, \xi\rangle$ で与えられ、$(1,1)-$テンソル場 ϕ は $\phi v = Jv - \eta(v)\mathcal{N}$ で定義され、$\langle\ ,\ \rangle$ は誘導計量である。ξ を特性ベクトル場、ϕ を特性テンソル場という。η 全臍的実超曲面は２つの主曲率を持ち、形作用素 A_M は、特性ベクトル場 ξ、ξ に直交する接ベクトル v に対して、$A_M\xi = \delta_M\xi,\ A_Mv = \lambda_Mv$ を満たす。 δ_M, λ_M で表

* E-mail:y.aoki.850@stn.nitech.ac.jp

される。ここで主曲率 δ_M, λ_M は、それぞれ次のようになる ([1])。

	$G(r) \subset \mathbb{C}P^n(c)$	$G(r) \subset \mathbb{C}H^n(c)$	HS	$T(r)$
δ_M	$\sqrt{c}\cot\sqrt{c}\,r$	$\sqrt{\lvert c\rvert}\coth\sqrt{\lvert c\rvert}\,r$	$\sqrt{\lvert c\rvert}$	$\sqrt{\lvert c\rvert}\coth\sqrt{\lvert c\rvert}\,r$
λ_M	$\frac{\sqrt{c}}{2}\cot\frac{\sqrt{c}}{2}r$	$\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}}{2}\coth\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}}{2}r$	$\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}}{2}$	$\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}}{2}\tanh\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}}{2}r$

リーマン多様体上の閉 2 形式を磁場という。このような閉 2 形式は 3 次元ユークリッド空間上の静磁場の一般化になっている。η 全臍的実超曲面 M 上で任意の点 $p \in M$ に対する任意の接ベクトル $v, w \in T_pM$ を取り、閉 2 形式 $\mathbb{F}_\phi$ を $\mathbb{F}_\phi(v,w) = \langle v, \phi w\rangle$ で定義する ([2])。これの定数倍 $\mathbb{F}_\kappa = \kappa\mathbb{F}_\phi$ $(\kappa \in \mathbb{R})$ を佐々木磁場という。弧長で径数付けられた曲線 γ が微分方程式 $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \kappa\phi\dot\gamma$ を満たすとき γ を $\mathbb{F}_\kappa$ の軌道と呼ぶ。特に $\kappa = 0$ のとき磁場による影響が全くないので軌道は測地線になる。よって軌道は測地線の自然な一般化になっている。η 全臍的実超曲面 $M(\subset \widetilde{M})$ 上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_\kappa$ の軌道 γ に対して $\rho_\gamma = \langle\dot\gamma, \xi\rangle$ と定め、これを γ の構造捩率という。$M, \widetilde{M}$ 上のリーマン接続をそれぞれ $\nabla, \widetilde{\nabla}$ としたとき、M に接する任意のベクトル場 X, Y に対し Gauss の公式 $\widetilde{\nabla}_XY = \nabla_XY + \langle A_MX, Y\rangle\mathcal{N}$ と Weingarten の公式 $\widetilde{\nabla}_X\mathcal{N} = -A_MX$ が成り立つので、これを用いて構造捩率の微分を計算すると、

$$\frac{d}{dt}\rho_\gamma = \langle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \xi\rangle + \langle\dot\gamma, \phi A_M\dot\gamma\rangle = \langle\dot\gamma, \phi A_M\dot\gamma\rangle$$

が得られる。ここで、A_M は対称で ϕ は歪対称なので

$$\frac{d}{dt}\rho_\gamma = \left\langle\dot\gamma, \frac{1}{2}(\phi A_M - A_M\phi)\dot\gamma\right\rangle$$

となる。η 全臍的実超曲面上では A_M と ϕ は、主曲率ベクトルの様子から同時に対角化可能、つまり $A_M\phi = \phi A_M$ となるので構造捩率 ρ_γ は γ に沿って一定である。佐々木磁場の軌道 γ について $\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\| = |\kappa|\|\phi\dot\gamma\| = |\kappa|\sqrt{1-\rho_\gamma^2}$ となるので、軌道に働くローレンツ力は構造捩率により変化する。

3　磁性ヤコビ場

η 全臍的実超曲面 M 上の $\mathbb{F}_\kappa$ 軌道 γ に沿ったベクトル場 Y が

$$\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y + R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma = \kappa(\nabla_Y\phi)\dot\gamma + \kappa\phi\nabla_{\dot\gamma}Y, \\ \langle\nabla_{\dot\gamma}Y, \dot\gamma\rangle = 0. \end{cases} \tag{J}$$

を満たすとき Y を磁性ヤコビ場と呼ぶ。ここで R は M の曲率テンソルを表す。軌道 γ に対して、滑らかな写像 $\alpha_\gamma(s,t) : (-\epsilon,\epsilon)\times\mathbb{R} \to M$ の任意の s について、曲線 $t \mapsto \alpha_\gamma(s,t)$ が $\mathbb{F}_\kappa$ の軌道になっているとき α_γ を軌道 $\gamma = \alpha_\gamma(0,t)$ の変分と呼ぶ。任意の磁性ヤコビ場は軌道の変分から得られる。実際、軌道の変分 $\alpha_\gamma(s,t)$ は任意の s において $\mathbb{F}_\kappa$-軌道になるので

$$\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}}\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t} = \kappa\phi\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}$$

となる。両辺を s で偏微分すると、

$$\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}}\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t} = \kappa(\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial s}}\phi)\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t} + \kappa\phi\Big(\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}}\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial s}\Big)$$

となる。一方で、曲率テンソルの定義から

$$\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}}\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}=\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}}\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial s}+R(\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t},\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial s})\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}$$

となり、$\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial s}(s,t)\Big|_{s=0}=Y$ とし、$s=0$ のとき (J) の 1 番目の式が得られる。(J) の 2 番目の式は軌道が単位スピードであることから得られる。ここで、磁性ヤコビ場 Y から軌道に沿った成分を除外した $Y^\sharp=Y-\langle Y,\dot\gamma\rangle$ を定義しておく。

4 Legendre 軌道

η 全臍的実超曲面 M 上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_\kappa$-軌道 γ の構造捩率 ρ_γ が 0 のとき、γ を Legendre 軌道という。また、Legendre 軌道に沿った Legendre 軌道の変分による磁性ヤコビ場を Legendre 磁性ヤコビ場という。構造捩率が ±1 のとき、$\phi(\dot\gamma)=0$ となることから γ は測地線になる。一方で、構造捩率が 0 つまり Legendre な場合は $\phi\dot\gamma=J\dot\gamma$ となりケーラーの場合と対応していると考えられる。今回は、このような軌道に対して、共役値、焦値と呼ばれる多様体の性質を数値的に表現したものを求めた。

定義 4.1 初期条件 $Y(0)=0$ のもと非自明な Legendre 磁性ヤコビ場 Y で $Y^\sharp(t_c)=0$ となるものが存在するとき、$\gamma(t_c)$ を γ に沿った Legendre 共役点といい、t_c を γ に沿った $\gamma(0)$ の Legendre 共役値という。

特に、最小の正の Legendre 共役値を γ に沿った $\gamma(0)$ の第 1 Legendre 共役値といい、$Lc_\gamma(\kappa;c)$ で表す。また γ に沿った Legendre 共役値が存在しないとき、$Lc_\gamma(\kappa;c)=\infty$ とする。η 全臍的実超曲面 M 上では、2 つの $\mathbb{F}_\kappa$-軌道 $\gamma_1,\ \gamma_2$ は合同である ([1])。すなわち、M の等長写像 φ により、$\gamma_2=\varphi\circ\gamma_1$ とすることができる。このため、第 1 Legendre 共役値は M と $\mathbb{F}_\kappa$ により定まる。$M\subset\mathbb{C}M^n(c)$ であることを明確にするために、ここではこの値を $Lc(\kappa;M)$ と表示する、。

定理 4.1 正則断面曲率 c の複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 内の η 全臍的実超曲面上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_\kappa$ の Legendre 軌道 γ をとる。このとき、第 1 Legendre 共役値 $Lc(\kappa;M)$ は次のようになる。

$$Lc(\kappa;M)=\begin{cases}2\pi/\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2} & (\kappa^2+c+4\lambda_M^2>0\ \text{のとき}),\\ \infty & (\kappa^2+c+4\lambda_M^2\le 0\ \text{のとき}).\end{cases}$$

Remark 1 2 次元複素空間 $\mathbb{C}^2$ 内の 3 次元標準球 S^3 上の測地線の共役値は π であることがよく知られている。上記の Legendre 共役値に対して、$\kappa\to0, c\to0$ とすると π となる。

定義 4.2 ケーラー多様体 $\widetilde{M}$ 上の複素構造 J に対して、閉 2 形式 $\mathbb{B}_J$ を $\mathbb{B}_J(v,w)=\langle v,Jw\rangle$ で定義し、これの定数倍 $\mathbb{B}_\kappa=\kappa\mathbb{B}_J$ $(\kappa\in\mathbb{R})$ をケーラー磁場という。

Remark 2 複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 上のケーラー磁場 $\mathbb{B}_\kappa$ の軌道の共役値 $c(\kappa;c)$ は $c(\kappa;c)=\pi/\sqrt{\kappa^2+c}$ で与えられる。

定義 4.3 磁性ヤコビ場 Y を $Y=f_Y\dot\gamma+g_Y\phi\dot\gamma+h_Y\xi+Y^\perp$ と表すと、定数 $a,b\in\mathbb{R}$ に対して初期条件 $Y(0)=a\phi\dot\gamma(0)+bY^\perp,\ \nabla_{\dot\gamma}Y(0)=\lambda_M\xi(0)+\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp(0)$ のもと非自明な Legendre 磁性ヤコ

ビ場 Y で $Y^\sharp(t_f)=0$ となるものが存在するとき、$\gamma(t_f)$ を γ に沿った $\gamma(0)$ の Legendre 焦点といい、t_f を γ に沿った $\gamma(0)$ の Legendre 焦値という。

特に、最小の正の Legendre 焦値を γ に沿った $\gamma(0)$ の第 1 Legendre 焦値といい、$Lf_\gamma(\kappa;c)$ で表す。また γ に沿った Legendre 焦値が存在しないとき、$Lf_\gamma(\kappa;c)=\infty$ とする。η 全臍的実超曲面 M 上では、２つの $\mathbb{F}_\kappa$-軌道 γ_1, γ_2 は合同であるため、ここではこの値を $Lf(\kappa;M)$ と表すことにする。

定理 4.2　正則断面曲率 c の複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 内の η 全臍的実超曲面上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_\kappa$ の軌道 γ をとる。このとき、第 1 Legendre 焦値 $Lf(\kappa;M)$ は次のようになる。

$$Lf(\kappa;M)=\begin{cases}\pi/\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2} & (\kappa^2+c+4\lambda_M^2>0\text{ のとき}),\\ \infty & (\kappa^2+c+4\lambda_M^2\leq 0\text{ のとき}).\end{cases}$$

Remark 3　2 次元複素空間 $\mathbb{C}^2$ 内の 3 次元標準球 S^3 上の測地線の焦値は $\pi/2$ であることがよく知られている。上記の Legendre 焦値に対して、$\kappa\to 0, c\to 0$ とすると $\pi/2$ となる。

Remark 4　複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 上のケーラー磁場 $\mathbb{B}_\kappa$ の軌道の焦値 $f(\kappa;c)$ は $f(\kappa;c)=\pi/2\sqrt{\kappa^2+c}$ で与えられる。

以下にこの定理を求めるための道筋を示す。まず、磁性ヤコビ場 Y を $Y=f_Y\dot\gamma+g_Y\phi\dot\gamma+h_Y\xi+Y^\perp$ と表し、磁性ヤコビ場の方程式を解く。構造テンソル ϕ の微分は、任意のベクトル場 X,Y に対して

$$(\nabla_X\phi)Y=\langle Y,\xi\rangle A_MY-\langle A_MX,Y\rangle\xi$$

となることが知られているので、

$$\nabla_{\dot\gamma}Y=(f_Y'-\kappa g_Y)\dot\gamma+(\kappa f_Y+g_Y'+h_Y\lambda_M)\phi\dot\gamma+(h_Y'-g_Y\lambda_M)\xi+\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp$$

方程式 (J) の 2 番目の式より、$\langle\nabla_{\dot\gamma}Y,\dot\gamma\rangle=0$ なので、$f_Y'-\kappa g_Y=0$ となる。また、Legendre 軌道の条件 $\langle\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t},\xi\rangle=0$ より、

$$\langle\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}}\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial s},\xi\rangle+\langle\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t},\phi A_M\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial s}\rangle=0$$

となり、$s=0$ のとき

$$\langle\nabla_{\dot\gamma}Y,\xi\rangle+\langle\dot\gamma,\phi A_MY\rangle=0$$

となるので、$h_Y'-2g_Y\lambda_M=0$ が得られる。よって、

$$\nabla_{\dot\gamma}Y=(\kappa f_Y+g_Y'+h_Y\lambda_M)\phi\dot\gamma+g_Y\lambda_M\xi+\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp$$

となるので、さらに t で偏微分すると

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y=&-\kappa(\kappa f_Y+g_Y'+h_Y\lambda_M)\dot\gamma+(\kappa f_Y'+g_Y''+h_Y'\lambda_M+g_Y\lambda_M^2)\phi\dot\gamma\\&+\big(g_Y'\lambda_M-\lambda(\kappa f_Y+g_Y'+h_Y\lambda_M)\big)\xi+\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp\end{aligned}$$

が得られる。また曲率テンソルに関して次のことが知られている。

補題 4.1（[4]） 正則断面曲率 c の複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 内の実超曲面 M 上のベクトル場 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、曲率テンソル $R(X,Y)Z$ は次で与えられる。

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z &= (c/4)\big(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y + \langle \phi Y,Z\rangle \phi X - \langle \phi X,Z\rangle \phi Y - 2\langle \phi X,Y\rangle \phi Z\big)\\ &\quad + \langle A_M Y,Z\rangle A_M X - \langle A_M X,Z\rangle A_M Y\end{aligned}$$

これにより、$Y = f_Y\dot\gamma + g_Y\phi\dot\gamma + h_Y\xi + Y^\perp$ と表すと、η 全臍的実超曲面上の曲率テンソル $R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma$ は次のようになる。

$$R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma = g_Y(c+\lambda_M^2)\phi\dot\gamma + h_Y\Big(\frac{c}{4}+\delta_M\lambda_M\Big)\xi + \Big(\frac{c}{4}+\lambda_M^2\Big)Y^\perp$$

一方で、$\kappa(\nabla_Y\phi)\dot\gamma = -\kappa f_Y\lambda_M\xi$ となることがわかる。よって、

$$\begin{aligned}&\big(g_Y'' + g_Y(\kappa^2+c+4\lambda_M^2)\big)\phi\dot\gamma + h_Y\big(\frac{c}{4}+\lambda_M(\delta_M-\lambda_M)\big)\xi + \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp - \kappa\phi\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp + (\frac{c}{4}+\lambda_M^2)Y^\perp\\ &\quad = \big(g_Y'' + g_Y(\kappa^2+c+4\lambda_M^2)\big)\phi\dot\gamma + \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp - \kappa\phi\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp + (\frac{c}{4}+\lambda_M^2)Y^\perp\\ &\quad = 0\end{aligned}$$

が得られる。以上より、解くべき微分方程式が得られる。

命題 4.1 複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 内の η 全臍的実超曲面 M 上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_\kappa$ の Legendre 軌道 γ に沿った Legendre 磁性ヤコビ場 Y を $Y = f_Y\dot\gamma + g_Y\phi\dot\gamma + h_Y\xi + Y^\perp$ と表すと、Y は以下の微分方程式を満たす。

$$\begin{cases} f_Y' = \kappa g_Y,\\ g_Y'' + g_Y(\kappa^2+c+4\lambda_M^2) = 0,\\ h_Y' = 2\lambda_M g_Y,\\ \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp - \kappa\phi\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp + (\frac{c}{4}+\lambda_M^2)Y^\perp = 0.\end{cases}$$

これを $\kappa^2+c+4\lambda_M^2$ の正負で場合分けし、解くことにより、次が得られる。

(i) $\kappa^2+c+4\lambda_M^2 > 0$ のとき

$$\begin{cases} f_Y(t) = \dfrac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}}\left\{a_1\sin\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t - a_2\cos\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t\right\} + a_3,\\ g_Y(t) = a_1\cos\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t + a_2\sin\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t,\\ h_Y(t) = \dfrac{2\lambda_M}{\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}}\left\{a_1\sin\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t - a_2\cos\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t\right\} + a_4,\\ Y^\perp(t) = e^{\kappa\sqrt{-1}t/2}(b_1\cos\dfrac{1}{2}\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t + b_2\sin\dfrac{1}{2}\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t)\,E.\end{cases}$$

(ii) $\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2 = 0$ のとき

$$\begin{cases} f_Y(t) = \kappa(\dfrac{a_1}{2}t^2 + a_2 t + a_3), \\ g_Y(t) = a_1 t + a_2, \\ h_Y(t) = 2\lambda_M(\dfrac{a_1}{2}t^2 + a_2 t + a_4), \\ Y^\perp(t) = e^{\kappa\sqrt{-1}t/2}(b_1 + b_2 t)\, E. \end{cases}$$

(iii) $\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2 < 0$ のとき

$$\begin{cases} f_Y(t) = \dfrac{\kappa}{\sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}} \left\{ a_1 \sinh \sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}\ t - a_2 \cosh \sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}\ t \right\} + a_3, \\ g_Y(t) = a_1 \cosh \sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}\ t + a_2 \sinh \sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}\ t, \\ h_Y(t) = \dfrac{2\lambda_M}{\sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}} \left\{ a_1 \sinh \sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}\ t - a_2 \cosh \sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}\ t \right\} + a_4, \\ Y^\perp(t) = e^{\kappa\sqrt{-1}t/2}(b_1 \cosh \dfrac{1}{2}\sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}\ t + b_2 \sinh \dfrac{1}{2}\sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}\ t)\, E. \end{cases}$$

ここで、$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ b_1,\ b_2 \in \mathbb{R}$ は定数であり、E は $\dot\gamma(0),\ \phi\dot\gamma(0),\ \xi(0),\ \mathcal{N}_{\gamma(0)}$ 全てに直交する平行ベクトル場。

ここに、初期条件 $Y(0) = 0$ を適用すると、

(i) $\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2 > 0$ のとき

$$\begin{cases} f_Y(t) = a\dfrac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2}}(1 - \cos\sqrt{\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2}\ t), \\ g_Y(t) = a \sin \sqrt{\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2}\ t, \\ h_Y(t) = a\dfrac{2\lambda_M}{\sqrt{\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2}}(1 - \cos\sqrt{\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2}\ t), \\ Y^\perp(t) = b\, e^{\kappa\sqrt{-1}t/2} \sin \dfrac{1}{2}\sqrt{\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2}\ t)\, E. \end{cases}$$

(ii) $\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2 = 0$ のとき

$$\begin{cases} f_Y(t) = \dfrac{a}{2}\kappa t^2, \\ g_Y(t) = at, \\ h_Y(t) = a\lambda_M t^2, \\ Y^\perp(t) = b\, e^{\kappa\sqrt{-1}t/2} t\, E. \end{cases}$$

(iii) $\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2 < 0$ のとき

$$\begin{cases} f_Y(t) = a\dfrac{\kappa}{\sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}} \left\{\cosh\sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}\ t - 1\right\}, \\ g_Y(t) = a\sinh\sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}\ t, \\ h_Y(t) = a\dfrac{2\lambda_M}{\sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}} \left\{\cosh\sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}\ t - 1\right\}, \\ Y^\perp(t) = b\ e^{\kappa\sqrt{-1}t/2} \sinh\dfrac{1}{2}\sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}\ t)\ E. \end{cases}$$

ここで、$a,\ b \in \mathbb{R}$ は定数。

が得られ、共役値が求まる。一方で、初期条件 $Y(0) = a\phi\dot\gamma(0) + bY^\perp(0),\ \nabla_{\dot\gamma}Y(0) = \lambda_M\xi(0) + \nabla_{\dot\gamma}Y^\perp(0)$ を適用すると、

(i) $\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2 > 0$ のとき

$$\begin{cases} f_Y(t) = a\dfrac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2}} \sin\sqrt{\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2}\ t, \\ g_Y(t) = a\cos\sqrt{\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2}\ t, \\ h_Y(t) = a\dfrac{2\lambda_M}{\sqrt{\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2}} \sin\sqrt{\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2}\ t, \\ Y^\perp(t) = b\ e^{\kappa\sqrt{-1}t/2} \cos\dfrac{1}{2}\sqrt{\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2}\ t)\ E. \end{cases}$$

(ii) $\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2 = 0$ のとき

$$\begin{cases} f_Y(t) = a\kappa t, \\ g_Y(t) = a, \\ h_Y(t) = 2a\lambda_M t, \\ Y^\perp(t) = b\ e^{\kappa\sqrt{-1}t/2}\ E. \end{cases}$$

(iii) $\kappa^2 + c + 4\lambda_M^2 < 0$ のとき

$$\begin{cases} f_Y(t) = a\dfrac{\kappa}{\sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}} \sinh\sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}\ t, \\ g_Y(t) = a\cosh\sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}\ t, \\ h_Y(t) = a\dfrac{2\lambda_M}{\sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}} \sinh\sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}\ t, \\ Y^\perp(t) = b\ e^{\kappa\sqrt{-1}t/2} \cosh\dfrac{1}{2}\sqrt{|c| - \kappa^2 - 4\lambda_M^2}\ t)\ E. \end{cases}$$

ここで、$a,\ b \in \mathbb{R}$ は定数。

が得られ、焦値が求まる。

Remark 5（[4]） 正則断面曲率 c の複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 内の η 全臍的実超曲面の ϕ -断面曲率 $K(v, \phi v)$ は次で与えられる。

$$K(v, \phi v) = c + \lambda_M^2$$

Remark 6（[1]） 複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の $\mathbb{C}H^{n-1}(c)$ を芯とする半径 r の管 $T(r)$ 上の $\mathbb{F}_\kappa$ 軌道 γ について、互いに素な正の整数 p, q $(p > q)$ に対して、磁場 κ が以下を満たすとき γ は閉じている。

$$\frac{2}{\sqrt{|c|}}|\kappa| \cosh \sqrt{|c|}r/2 = \frac{p+q}{pq}$$

また、軌道の長さは $4\pi\sqrt{pq/|c|}\cosh\left(\sqrt{|c|}r/2\right)$ または $2\pi(p+q)/|\kappa|$ となる。今回の結果により、この性質に関わらず共役値、焦値が決まっていることがわかる。

参考文献

[1] T. Adachi, *Trajectories on geodesic spheres in a non-flat complex spaceform*, J. Geom. **90** (2008), 1–29.

[2] T. Bao and T. Adachi, *Circular trajectories on real hypersurfaces in a nonflat complex space form*, J. Geom. **96** (2009), 41–55.

[3] J. Inoguchi and M.I. Munteanu, *Magnetic Jacobi fields in Sasakian space forms*, Medit-ter. J. Math. **20** (2023), 20–29.

[4] T. Kajiwara and S. Maeda, *Sectional curvetures of geodesic spheres in a complex hyperbolic space*, Kodai Math. J. **38** (2015), 604–619.