ケーラー磁場における磁性焦値の評価

名古屋工業大学 大学院工学研究科 工学専攻 情報数理分野
青木侑省（Yusei Aoki）

概要

ケーラー多様体上のケーラー形式を定数倍したものをケーラー磁場と呼び、弧長で係数付けられた曲線が $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \kappa J\dot\gamma$ を満たすときこの磁場のもとでの軌道といわれる。ここでは、軌道を変分することによって得られる磁性ヤコビ場を対象に研究を行った。今回は軌道の始点をある超曲面に沿って変動させる場合を考える。この場合における磁性焦値を複素空間形のものと比較することで評価を得た。

1 導入

これまで、リーマン多様体の形状を考察する主な手法として測地線の性質が多くの研究者により調べられてきた。そこで、著者は測地線を磁場によって一般化し、さらに広い対象となる曲線族を考えることでより詳しい情報、特に多様体上の幾何構造に関係した曲線族を考えると多様体の形状と幾何構造の性質の両者を含めた情報が得られるのではないかとして考察を進めている。今回は、よく知られているベルジエの比較定理 ([2]) に対応した軌道の始点をある超曲面に沿って動かす場合の特殊な磁性ヤコビ場を考え、その大きさを下から評価した。この磁性ヤコビ場は、始点での変分方向を軌道の速度ベクトルを複素構造で回した方向に限定するものである。このような方向は軌道が磁場によって曲がる方向であるため重要な方向であると考える。

2 磁場

リーマン多様体上の閉 2 形式 $\mathbb{B}$ を磁場という。このような閉 2 形式は 3 次元ユークリッド空間の静磁場の一般化である。接束の自己準同型写像 $\Omega_{\mathbb{B}}$ を任意の接ベクトル v, w に対して $\langle v, \Omega(w)\rangle = \mathbb{B}(v, w)$ で定義する。特に、ケーラー多様体上の磁場 $\mathbb{B}_\kappa$ が複素構造 J を使って $\mathbb{B}_\kappa(v, w) = \langle v, \kappa J w\rangle$ で与えられる。リーマン多様体 M 上の磁場 $\mathbb{B}$ に対して、弧長によって径数付けられた滑らかな曲線 γ が微分方程式 $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \Omega_{\mathbb{B}}(\dot\gamma)$ を満たすとき γ を M 上の磁場 $\mathbb{B}$ の軌道といい、ケーラー磁場 $\mathbb{B}_\kappa$ の軌道 γ は $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \kappa J\dot\gamma$ で与えられる。

3　磁性ヤコビ場

ケーラー多様体 M 上の $\mathbb{B}_\kappa$-軌道 γ に沿ったベクトル場 Y が

$$\begin{cases}\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y-\kappa J\nabla_{\dot\gamma}Y+R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma=0,\\ \langle\nabla_{\dot\gamma}Y,\dot\gamma\rangle=0.\end{cases}\tag{J}$$

を満たすとき Y を磁性ヤコビ場と呼ぶ。ここで ∇, R は M のリーマン接続と曲率テンソルを表す。滑らかな写像 $\alpha:(-\epsilon,\epsilon)\times\mathbb{R}\to M$ に対して、各 s で $\alpha(s,\cdot)$ が M 上の $\mathbb{B}_\kappa$-軌道であるとき、写像 $\alpha(s,t)$ を軌道の変分であるという。任意の磁性ヤコビ場は軌道の変分から得られる。実際、軌道の変分 $\alpha(s,t)$ は任意の s において $\mathbb{B}_\kappa$-軌道になるので

$$\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\kappa J\frac{\partial\alpha}{\partial t}$$

となる。両辺を s で偏微分すると、

$$\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\kappa J\Big(\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\frac{\partial\alpha}{\partial s}\Big)$$

となる。一方で、曲率テンソルの定義から

$$\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\frac{\partial\alpha}{\partial s}+R(\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial s})\frac{\partial\alpha}{\partial t}$$

となり、(J) の 1 番目の式が得られる。(J) の 2 番目の式は単位スピードの軌道を取ることを意味する。ベクトル場 X を関数 f_X, g_X と $\dot\gamma, J\dot\gamma$ に直交するベクトル場 $X^\perp$ を用いて、$X=f_X\dot\gamma+g_XJ\dot\gamma+X^\perp$ と表す。共変微分 $\nabla_{\dot\gamma}X^\perp, \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}X^\perp$ が共に $\dot\gamma, J\dot\gamma$ に直交することから、式 (J) は

$$\begin{cases}f_Y'=\kappa g_Y,\\ (g_Y''+\kappa^2g_Y)J\dot\gamma+\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp-\kappa J\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp+R(Y^\sharp,\dot\gamma)\dot\gamma=0,\end{cases}\tag{J'}$$

となる。ここで、γ に沿ったベクトル場 $Y^\sharp$ を $Y^\sharp=g_YJ\dot\gamma+Y^\perp$ と定める。通常のヤコビ場の場合と違い、磁性ヤコビ場の場合は $\dot\gamma$ 方向の成分 f_Y が関係するので少し複雑になっている。軌道 γ に沿った磁性ヤコビ場全体の集合を $\mathcal{J}_\gamma$ で表す。大きくわけてヤコビ場には、軌道の始点を固定して変分させるタイプと始点を変分させるタイプがある。今回は後者の始点を変分させるタイプでさらに始点での変分方向を $J\dot\gamma$ 方向に固定したものを考える。筆者は、この方向が軌道が磁場によって曲げられた方向であるので重要な方向であると考え、今回この場合の状況を調べた。

与えられた λ に対して、$Y(0)=J\dot\gamma(0), (\nabla_{\dot\gamma}Y)(0)=\lambda J\dot\gamma(0)$ を満たす $Y\in\mathcal{J}_\gamma$ を λ-特性磁性ヤコビ場という。γ に沿った λ-特性磁性ヤコビ場 Y に対して、$Y^\sharp(t_0)=0$ となる t_0 を γ に沿った $p=\gamma(0)$ の λ-磁性焦値という。最小のこのような値を第 1λ-特性磁性焦値といい、$\mathrm{cf}_{\gamma,\lambda}(p)$ で表す。γ に沿った λ-特性磁性焦値が存在しないとき $\mathrm{cf}_{\gamma,\lambda}=\infty$ とする。

複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$、複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$、複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ を合わせた複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 上での λ-特性磁性ヤコビ場を見る。ここで、c は正則断面曲率である。複素空間形上のベクトル場 X,Y,Z に対して、曲率テンソル $R(X,Y)Z$ は

$$R(X,Y)Z=\frac{c}{4}\big\{\langle Y,Z\rangle X-\langle X,Z\rangle Y-\langle Y,JZ\rangle JX+\langle X,JZ\rangle JY+2\langle X,JY\rangle JZ\big\}$$

と表される。これを $\mathbb{B}_\kappa$-軌道に沿った磁性ヤコビ場 $Y^\sharp$ に用いると $R(Y^\sharp,\dot\gamma)\dot\gamma = c(g_Y J\dot\gamma + (1/4)Y^\perp)$ が得られる。よって、(J′) は次のようになる。

$$
\begin{cases}
f_Y' = \kappa g_Y,\\
g_Y'' + (\kappa^2+c)g_Y = 0,\\
\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp - \kappa J\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp + (c/4)Y^\perp = 0.
\end{cases}
$$

このことと、$Y^\perp$ 方向の初期条件が 0 であることから、複素空間形上の λ-特性磁性ヤコビ場の $Y^\perp$ 方向は常に 0 である。複素空間形上の $\mathbb{B}_\kappa$-軌道は互いに合同、すなわち 2 つの $\mathbb{B}_\kappa$-軌道 γ_1,γ_2 に対して、$\gamma_2(t) = \varphi\circ\gamma_1(t)$ が全ての t について成り立つ等長写像 φ が存在する、ので、λ-特性磁性焦値は軌道の始点によらない。そこでこの値を $\mathrm{cf}_\lambda(\kappa;c)$ と表す。

例 3.1. 複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ 上の $\mathbb{B}_\kappa$-軌道 γ をとる。γ に沿った λ-特性磁性ヤコビ場 Y を、$Y = f_Y\dot\gamma + g_Y J\dot\gamma$ とすると、

$$
f_Y(t) = \sin\kappa t + \frac{\lambda}{\kappa}(1-\cos\kappa t),\quad g_Y(t) = \cos\kappa t + \frac{\lambda}{\kappa}\sin\kappa t.
$$

となる。また λ-特性磁性焦値は以下で与えられる。

$$
cf_\lambda(\kappa;c) = \begin{cases}
(1/\kappa)\tan^{-1}(\kappa/|\lambda|), & \kappa\lambda < 0 \text{ のとき},\\
\pi/(2|\kappa|), & \lambda = 0 \text{ のとき},\\
\pi - (1/\kappa)\tan^{-1}(\kappa/|\lambda|), & \kappa\lambda > 0 \text{ のとき}.
\end{cases}
$$

例 3.2. 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$ 上の $\mathbb{B}_\kappa$-軌道をとる。γ に沿った λ-特性磁性ヤコビ場 Y を、$Y = f_Y\dot\gamma + g_Y J\dot\gamma$ とすると、

$$
\begin{aligned}
f_Y(t) &= \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+c}}\sin\sqrt{\kappa^2+c}\,t + \frac{\lambda\kappa}{\kappa^2+c}\bigl(1-\cos\sqrt{\kappa^2+c}\,t\bigr),\\
g_Y(t) &= \cos\sqrt{\kappa^2+c}\,t + \frac{\lambda}{\sqrt{\kappa^2+c}}\sin\sqrt{\kappa^2+c}\,t.
\end{aligned}
$$

となる。また λ-特性磁性焦値は以下で与えられる。

$$
cf_\lambda(\kappa;c) = \begin{cases}
\bigl(1/\sqrt{\kappa^2+c}\bigr)\tan^{-1}\bigl(\sqrt{\kappa^2+c}/|\lambda|\bigr), & \lambda < 0 \text{ のとき},\\
\pi/\bigl(2\sqrt{\kappa^2+c}\bigr), & \lambda = 0 \text{ のとき},\\
\pi - \bigl(1/\sqrt{\kappa^2+c}\bigr)\tan^{-1}\bigl(\sqrt{\kappa^2+c}/\lambda\bigr), & \lambda > 0 \text{ のとき}.
\end{cases}
$$

例 3.3. 複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ 上の $\mathbb{B}_\kappa$-軌道をとる。γ に沿った λ-特性磁性ヤコビ場 Y を、$Y = f_Y\dot\gamma + g_Y J\dot\gamma$ とすると、

$|\kappa| < \sqrt{|c|}$ のとき、関数 f_Y, g_Y は

$$
\begin{aligned}
f_Y(t) &= \frac{\kappa}{\sqrt{|c|-\kappa^2}}\sinh\sqrt{|c|-\kappa^2}\,t + \frac{\lambda\kappa}{\sqrt{|c|-\kappa^2}}\bigl(\cosh\sqrt{|c|-\kappa^2}\,t - 1\bigr),\\
g_Y(t) &= \cosh\sqrt{|c|-\kappa^2}\,t + \frac{\lambda}{\sqrt{|c|-\kappa^2}}\sinh\sqrt{|c|-\kappa^2}\,t.
\end{aligned}
$$

となる。また λ-特性磁性焦値は以下で与えられる。

$$
\begin{aligned}
&cf_\lambda(\kappa; c)\\
&= \begin{cases}
\dfrac{1}{\sqrt{|c|-\kappa^2}} \tanh^{-1} \dfrac{\sqrt{|c|-\kappa^2}}{|\lambda|} = \dfrac{1}{2\sqrt{|c|-\kappa^2}} \log \dfrac{|\lambda| + \sqrt{|c|-\kappa^2}}{|\lambda| - \sqrt{|c|-\kappa^2}}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda < -\sqrt{|c|-\kappa^2} \text{ のとき}, \\
\infty, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \lambda \geq -\sqrt{|c|-\kappa^2} \text{ のとき},
\end{cases}
\end{aligned}
$$

$\kappa = \pm\sqrt{|c|}$ のとき、関数 f_Y, g_Y は

$$
f_Y(t) = \kappa t\Big(1 + \frac{1}{2}\lambda t\Big), \qquad g_Y(t) = 1 + \lambda t.
$$

となる。また λ-特性磁性焦値は以下で与えられる。

$$
cf_\lambda(\kappa; c) = \begin{cases} 1/|\lambda|, & \lambda < 0 \text{ のとき}, \\ \infty, & \lambda \geq 0 \text{ のとき}. \end{cases}
$$

$|\kappa| > \sqrt{|c|}$ のとき、関数 f_Y, g_Y は

$$
\begin{aligned}
f_Y(t) &= \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+c}} \sin\sqrt{\kappa^2+c}\,t + \frac{\lambda\kappa}{\kappa^2+c}\big(1 - \cos\sqrt{\kappa^2+c}\,t\big), \\
g_Y(t) &= \cos\sqrt{\kappa^2+c}\,t + \frac{\lambda}{\sqrt{\kappa^2+c}} \sin\sqrt{\kappa^2+c}\,t.
\end{aligned}
$$

となる。また λ-特性磁性焦値は以下で与えられる。

$$
cf_\lambda(\kappa; c) = \begin{cases}
\big(1/\sqrt{\kappa^2+c}\big) \tan^{-1}\big(\sqrt{\kappa^2+c}/|\lambda|\big), & \lambda < 0 \text{ のとき}, \\
\pi/\big(2\sqrt{\kappa^2+c}\big), & \lambda = 0 \text{ のとき}, \\
\pi - \big(1/\sqrt{\kappa^2+c}\big) \tan^{-1}\big(\sqrt{\kappa^2+c}/\lambda\big), & \lambda > 0 \text{ のとき}.
\end{cases}
$$

断面曲率が上に有界な特性磁性ヤコビ場の大きさを下から評価する。上記の例から、0 でない κ と非正定数 λ に対して、複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 上の軌道に沿った第 1 磁性焦値 $\mathrm{cf}_\lambda(\kappa; c)$ は次のように与えられる。

$$
cf_\lambda(\kappa; c) = \begin{cases}
\dfrac{1}{\sqrt{\kappa^2+c}} \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{\kappa^2+c}}{|\lambda|}, & \kappa^2 + c > 0 \text{ かつ } \lambda < 0 \text{ のとき}, \\
\dfrac{\pi}{2\sqrt{\kappa^2+c}}, & \kappa^2 + c \text{ かつ } \lambda = 0 \text{ のとき}, \\
\dfrac{1}{|\lambda|}, & \kappa^2 + c = 0 \text{ かつ } \lambda < 0 \text{ のとき}, \\
\dfrac{1}{2\sqrt{|c|-\kappa^2}} \log \dfrac{|\lambda| + \sqrt{|c|-\kappa^2}}{|\lambda| - \sqrt{|c|-\kappa^2}} & \kappa^2 + c < 0 \text{ かつ } \lambda < -\sqrt{|c|-\kappa^2} \text{ のとき}, \\
\infty, & \kappa^2 + c \leq 0 \text{ かつ } -\sqrt{|c|-\kappa^2} \leq \lambda < 0 \text{ のとき}.
\end{cases}
$$

評価のために区間 $[0, \mathrm{cf}_\lambda(\kappa, c)]$ で 2 つの関数 $\mathfrak{n}_{\kappa,\lambda}(\cdot; c)$、$\mathfrak{r}_{\kappa,\lambda}(\cdot; c)$ を次で定義する。

$$\mathfrak{n}_{\kappa,\lambda}(t;c) = \begin{cases} \left(\cos\sqrt{\kappa^2+c}\,t + \dfrac{\lambda}{\sqrt{\kappa^2+c}}\sin\sqrt{\kappa^2+c}\,t\right)^2, & \kappa^2+c>0 \text{ のとき}, \\ (1+\lambda t)^2, & \kappa^2+c=0 \text{ のとき}, \\ \left(\cosh\sqrt{|c|-\kappa^2}\,t + \dfrac{\lambda}{\sqrt{|c|-\kappa^2}}\sinh\sqrt{|c|-\kappa^2}\,t\right)^2, & \kappa^2+c<0 \text{ のとき}, \end{cases}$$

$$\mathfrak{r}_{\kappa,\lambda}(t;c) = \mathfrak{n}'_{\kappa,\lambda}(t;c)/\mathfrak{n}_{\kappa,\lambda}(t;c).$$

関数 $\mathfrak{n}_{\kappa,\lambda}(\cdot; c)$ は、複素空間形上の λ-特性磁性ヤコビ場の速度ベクトルに直交する成分の大きさであり、$\mathfrak{r}_{\kappa,\lambda}(\cdot; c)$ は、$\mathfrak{n}_{\kappa,\lambda}(\cdot; c)$ の対数微分である。これらを用いて、以下のように λ-特性ヤコビ場、λ-特性磁性焦値を下から評価することができる。ここで、γ に沿った基底となるヤコビ場が必要なため補助的なヤコビ場を導入する。γ に沿ったヤコビ場 Y で $Y(0)$ が $J\dot\gamma(0)$ に平行、$\langle(\nabla_{\dot\gamma}Y)(0), J\dot\gamma(0)\rangle = \lambda\langle Y(0), J\dot\gamma(0)\rangle$ を満たすものの集合を $\mathcal{K}_{\gamma,\lambda}$ と表す。$\mathcal{K}_{\gamma,\lambda}$ は λ-特性磁性ヤコビ場全体の集合と $\{Y \in \mathcal{J}_\gamma \mid Y(0) = 0, (\nabla_{\dot\gamma}Y)(0) \perp J\dot\gamma(0)\}$ を合わせた集合である。

定理 3.1 ([1])**.** λ を非正定数、γ を $\mathrm{Riem}M < c$ *(c:* 定数*)* を満たすケーラー多様体 M のケーラー磁場 $\mathbb{B}_\kappa$ の軌道とする。$Y(0) \neq 0$ となる任意の磁性ヤコビ場 $Y \in \mathcal{K}_{\gamma,\lambda}$ をとる。そのとき、区間 $[0, \mathrm{cf}_\kappa(\lambda; c)]$ で以下が成り立つ。

(1) 関数 $t \mapsto \|Y^\sharp(t)\|^2/\mathfrak{n}_{\kappa,\lambda}(t;c)$ は単調増加
(2) $\|Y^\sharp(t)\|^2 \geq g_Y(0)^2\,\mathfrak{n}_{\kappa,\lambda}(t;c)$,
(3) $\langle(\nabla_{\dot\gamma}Y^\sharp)(t), Y^\sharp(t)\rangle \geq \|Y^\sharp(t)\|^2 \times r_{\kappa,\lambda}(t;c)$.

系 3.1. 複素空間形上の軌道に沿った第 1 λ-磁性焦値 $\mathrm{cf}_\lambda(\kappa; c)$ とケーラー多様体上の軌道 γ に沿った第 1 λ-磁性焦値 $\mathrm{cf}_{\gamma,\lambda}(\gamma(0))$ に対して、$\mathrm{cf}_{\gamma,\lambda}(\gamma(0)) \geq \mathrm{cf}_\lambda(\kappa; c)$ が成り立つ。

この結果は、より弱い条件の補助的なヤコビ場を用いて得られるため、逆からの評価は同じ手法では得られない。

最後に証明のアイデアを与える。γ に沿ったベクトル場 X に対して次のような指数

$$\mathcal{I}^T_{\kappa,\lambda}(X) = \int_0^T \left\{(g'_X)^2 - \kappa^2 g_X^2 + \left\langle \nabla_{\dot\gamma}X^\perp - \kappa JX^\perp, \nabla_{\dot\gamma}X^\perp\right\rangle \right. \\ \left. - \langle R(X,\dot\gamma)\dot\gamma, X\rangle\right\} dt + \lambda g_X(0)^2$$

を考える。磁性ヤコビ場の場合は $\mathcal{I}^T_{\kappa,\lambda}(Y^\sharp) = \langle(\nabla_{\dot\gamma}Y^\sharp)(T), Y^\sharp(T)\rangle$ となる。一般のケーラー多様体上の磁性ヤコビ場を平行移動を用いて複素空間形に移し、指数を使って評価を行う。

参考文献

[1] Y. Aoki and T. Adachi, *Characteristic magnetic focal values on Kähler manifolds*, Journal of Geometry **Vol.114, issue 3** (2023), article 31.

[2] Cheeger, J., Evin, D.G.: Comparison theorems in Riemannian geometry, North-Holland Mathematical Library, Vol. 9, North-Holland Publishing Co. (1975)