複素射影空間内の A 型実超曲面上の佐々木磁場の軌道とケーラー磁場

名古屋工業大学大学院　工学研究科　工学専攻　情報工学系プログラム
青木侑省（Yusei Aoki）

概要

著者はリーマン多様体の形状を調べるために、測地線を一般化して一定方向に加速度を持つ磁場による軌道の考察を行なっている。今回は複素射影空間内の A 型実超曲面を対象に選び、その上の接触構造から誘導される佐々木磁場の軌道が複素射影空間でどのように見えるかという観点で研究を進めた。外的形状が複素射影空間上のある種の軌道になっているという特別な状況を考え、その合同類が軌道全体の合同類集合の中でどの部分を占めるかを調べた。

1　導入

これまで、多くの研究者によりリーマン多様体の形状を考察する主な手法として測地線の性質が調べられてきた。そこで、著者は測地線を磁場によって一般化し、さらに広い対象となる曲線族を考えることでより詳しい情報、特に多様体上の幾何構造に関係した曲線族を考えると多様体の形状と幾何構造の性質の両者を含めた情報が得られるのではないかとして考察を進めている。今回は複素射影空間内の実超曲面に対象を絞って考察をした。例えば、ユークリッド空間内の標準球面上の測地線はユークリッド空間では円に見えてこの性質によって標準球面は特徴づけられる ([4])。測地線の外的形状については例えば [2][5] でも行われている。このような考察を広い対象となる曲線族を元に実超曲面に対して行うために代表的な実超曲面である A 型実超曲面に対してその接触構造に関連する曲線族の外的形状を考察した。

2　磁場

定義 2.1. リーマン多様体上の閉 2 形式を磁場という ([*6*] 参照)。

リーマン多様体 M 上の磁場 $\mathbb{B}$ に対して、接束 TM の自己準同型写像 $\Omega_{\mathbb{B}} : TM \to TM$ を

$$\langle v, \Omega(w)\rangle = \mathbb{B}(v, w) \quad ({}^{\forall}v, w \in T_pM, \quad {}^{\forall}p \in M)$$

で定義する。$\mathbb{B}(v, w) = -\mathbb{B}(w, v)$ より、$\Omega_{\mathbb{B}}$ は歪対称である。

定義 2.2. リーマン多様体 M 上の磁場 $\mathbb{B}$ に対して、弧長によって径数付けられた滑らかな曲線 γ が微分方程式

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \Omega_{\mathbb{B}}(\dot\gamma)$$

[Hil04] L. Hille, *Exceptional sequences of line bundles on toric varieties*, Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen: Seminars 2003/2004, Universitätsdrucke Göttingen, Göttingen, 2004, pp. 175–190.

[HI13] A. Hochenegger and N. O. Ilten, *Exceptional sequences on rational $\mathbb{C}^*$-surfaces*, Manuscripta Math. **142** (2013), no. 1-2, 1–34.

[Huy06] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006.

[KO94] S. A. Kuleshov and D. O. Orlov, *Exceptional sheaves on Del Pezzo surfaces*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **58** (1994), no. 3, 53–87 (Russian, with Russian summary); English transl., Russian Acad. Sci. Izv. Math. **44** (1995), no. 3, 479–513.

[Kuz14] A. Kuznetsov, *Semiorthogonal decompositions in algebraic geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. II, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014, pp. 635–660.

[Lee20] D. W. Lee, *Classification of full exceptional collections on smooth toric Fano varieties with Picard rank two*, preprint arXiv:2005.09783 (2020).

[LYY19] W. Liu, S. Yang, and X. Yu, *Classification of full exceptional collections of line bundles on three blow-ups of* $\mathbb{P}^3$, J. Korean Math. Soc. **56** (2019), no. 2, 387–419.

[Orl92] D. O. Orlov, *Projective bundles, monoidal transformations, and derived categories of coherent sheaves*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **56** (1992), no. 4, 852–862 (Russian, with Russian summary); English transl., Russian Acad. Sci. Izv. Math. **41** (1993), no. 1, 133–141.

[Pir20] D. Pirozhkov, *Admissible Subcategories of del Pezzo Surfaces*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2020. Thesis (Ph.D.)–Columbia University.

[Ray20] N. Ray, *Examples of blown up varieties having projective bundle structures*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **130** (2020), no. 1, Paper No. 15, 11.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}
0	B_6	$B_{0,-1}$	B_8	$B_{0,0}$	$B_{1,0}$	$B_{0,1}$	$B_{1,1}$	$B_{2,-1}$	$B_{1,2}$	$B_{2,0}$	$B_{2,1}$
1	$B_{0,-2}$	B_6	$B_{0,-1}$	$B_{1,-1}$	$B_{0,0}$	$B_{1,0}$	$B_{2,-2}$	$B_{1,1}$	$B_{2,-1}$	$B_{2,0}$	B_7
2	B_{10}	B_6	$B_{0,1}$	B_8	$B_{0,2}$	$B_{1,0}$	$B_{0,3}$	$B_{1,1}$	$B_{1,2}$	$B_{2,2}$	$B_{2,3}$
3	$B_{0,-2}$	$B_{1,-2}$	$B_{0,-1}$	$B_{1,-1}$	$B_{2,-3}$	$B_{1,0}$	$B_{2,-2}$	$B_{2,-1}$	B_5	B_7	B_3
4	$B_{0,0}$	B_6	$B_{0,1}$	$B_{1,-1}$	$B_{0,2}$	$B_{1,0}$	$B_{1,1}$	$B_{2,1}$	$B_{2,2}$	B_7	$B_{2,3}$
5	B_4	B_6	$B_{0,-1}$	B_8	$B_{0,0}$	$B_{0,1}$	$B_{1,1}$	$B_{1,2}$	$B_{2,0}$	$B_{1,3}$	$B_{2,1}$
6	$B_{0,0}$	$B_{1,-2}$	$B_{0,1}$	$B_{1,-1}$	$B_{1,0}$	$B_{2,0}$	$B_{2,1}$	B_5	$B_{2,2}$	B_7	B_9
7	$B_{0,-2}$	B_6	$B_{0,-1}$	$B_{0,0}$	$B_{1,0}$	$B_{1,1}$	$B_{2,-1}$	$B_{1,2}$	$B_{2,0}$	B_7	$B_{2,1}$
8	B_{10}	B_6	B_8	$B_{0,2}$	$B_{0,3}$	$B_{1,1}$	$B_{0,4}$	$B_{1,2}$	$B_{2,2}$	$B_{1,3}$	$B_{2,3}$
9	$B_{0,-2}$	$B_{0,-1}$	$B_{1,-1}$	$B_{1,0}$	$B_{2,-2}$	$B_{1,1}$	$B_{2,-1}$	B_5	$B_{2,0}$	B_7	B_3
10	B_6	$B_{0,1}$	$B_{0,2}$	$B_{1,0}$	$B_{0,3}$	$B_{1,1}$	$B_{2,1}$	$B_{1,2}$	$B_{2,2}$	B_7	$B_{2,3}$
11	$B_{0,0}$	$B_{0,1}$	$B_{1,-1}$	$B_{0,2}$	$B_{1,0}$	$B_{2,0}$	$B_{1,1}$	$B_{2,1}$	B_5	$B_{2,2}$	B_7

表 2: The FEC obtained by mutation of Serre type from (10)

参考文献

[AW21] K. Altmann and F. Witt, *The structure of exceptional sequences on toric varieties of Picard rank two*, preprint arXiv:2112.14637 (2021).

[Beĭ78] A. A. Beĭlinson, *Coherent sheaves on $\mathbf{P}^n$ and problems in linear algebra*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **12** (1978), no. 3, 68–69 (Russian).

[BGvBKS15] C. Böhning, H.-C. Graf von Bothmer, L. Katzarkov, and P. Sosna, *Determinantal Barlow surfaces and phantom categories*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **17** (2015), no. 7, 1569–1592.

[BK89] A. I. Bondal and M. M. Kapranov, *Representable functors, Serre functors, and reconstructions*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **53** (1989), no. 6, 1183–1205, 1337 (Russian); English transl., Math. USSR-Izv. **35** (1990), no. 3, 519–541.

[Bon89] A. I. Bondal, *Representations of associative algebras and coherent sheaves*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **53** (1989), no. 1, 25–44 (Russian); English transl., Math. USSR-Izv. **34** (1990), no. 1, 23–42.

[BO01] A. Bondal and D. Orlov, *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, Compositio Math. **125** (2001), no. 3, 327–344.

[GO13] S. Gorchinskiy and D. Orlov, *Geometric phantom categories*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **117** (2013), 329–349.

[GK04] A. L. Gorodentsev and S. A. Kuleshov, *Helix theory*, Mosc. Math. J. **4** (2004), no. 2, 377–440, 535 (English, with English and Russian summaries).

Proposition 3.3. $D_1 = B_6$ であるような長さ 12 の例外列は以下のいずれかに一致する．

1. $\{B_6, B_8, B_{0,b_0}, B_{0,b_0+1}, B_{0,b_0+2}, B_{1,b_1}, B_{1,b_1+1}, B_{1,b_1+2}, B_{2,b_2}, B_{2,b_2+1}, B_{2,b_2+2}\}$
2. $\{B_6, B_8, B_{0,b_0}, B_{0,b_0+1}, B_{1,b_0+1}, B_{0,b_0+2}, B_{1,b_0+2}, B_{1,b_0+3}, B_{2,b_2}, B_{2,b_2+1}, B_{2,b_2+2}\}$
3. $\{B_6, B_8, B_{0,b_0}, B_{0,b_0+1}, B_{1,b_0-1}, B_{0,b_0+2}, B_{1,b_0}, B_{1,b_0+1}, B_{2,b_2}, B_{2,b_2+1}, B_{2,b_2+2}\}$
4. $\{B_6, B_8, B_{0,b}, B_{0,b+1}, B_{1,b+1}, B_{0,b+2}, B_{1,b+2}, B_{2,b+2}, B_{1,b+3}, B_{2,b+3}, B_{2,b+4}\}$
5. $\{B_6, B_8, B_{0,b}, B_{0,b+1}, B_{1,b+1}, B_{0,b+2}, B_{1,b+2}, B_{2,b}, B_{1,b+3}, B_{2,b+1}, B_{2,b+2}\}$
6. $\{B_6, B_8, B_{0,b}, B_{0,b+1}, B_{1,b-1}, B_{0,b+2}, B_{1,b}, B_{2,b}, B_{1,b+1}, B_{2,b+1}, B_{2,b+2}\}$
7. $\{B_6, B_8, B_{0,b}, B_{0,b+1}, B_{1,b-1}, B_{0,b+2}, B_{1,b}, B_{2,b-2}, B_{1,b+1}, B_{2,b-1}, B_{2,b}\}$
8. $\{B_6, B_{0,-1}, B_8, B_{0,0}, B_{1,0}, B_{0,1}, B_{1,1}, B_{2,1}, B_{1,2}, B_{2,2}, B_{2,3}\}$
9. $\{B_6, B_{0,1}, B_8, B_{0,2}, B_{1,2}, B_{0,3}, B_{1,3}, B_{2,3}, B_{1,4}, B_{2,4}, B_{2,5}\}$
10. $\{B_6, B_{0,-1}, B_8, B_{0,0}, B_{1,0}, B_{0,1}, B_{1,1}, B_{2,-1}, B_{1,2}, B_{2,0}, B_{2,1}\}$
11. $\{B_6, B_{0,1}, B_8, B_{0,2}, B_{1,2}, B_{0,3}, B_{1,3}, B_{2,1}, B_{1,4}, B_{2,2}, B_{2,3}\}$
12. $\{B_6, B_{0,-1}, B_8, B_{0,0}, B_{1,-2}, B_{0,1}, B_{1,-1}, B_{2,-1}, B_{1,0}, B_{2,0}, B_{2,1}\}$
13. $\{B_6, B_{0,1}, B_8, B_{0,2}, B_{1,0}, B_{0,3}, B_{1,1}, B_{2,1}, B_{1,2}, B_{2,2}, B_{2,3}\}$
14. $\{B_6, B_{0,-1}, B_8, B_{0,0}, B_{1,-2}, B_{0,1}, B_{1,-1}, B_{2,-3}, B_{1,0}, B_{2,-2}, B_{2,-1}\}$
15. $\{B_6, B_{0,1}, B_8, B_{0,2}, B_{1,0}, B_{0,3}, B_{1,1}, B_{2,-1}, B_{1,2}, B_{2,0}, B_{2,1}\}$

Proof. (Outline) Orlov の projective bundle formula(Theorem 2.9) から，$D^b(X)$ は長さ 12 の例外生成列を持つ．従って簡単な考察により例外列の長さは 12 を超えることはないことがわかる．上で議論したように，表から分岐を数え上げると．上のリストが得られる． □

変異関手を用いると，Proposition で得られた 1 つの例外列から mutation of Serre type and normalization によって新たな (正規化された) 例外列を得ることができる．例えば，次の表 2 は Proposition の (10) の例外列に対して繰り返し mutation of Serre type and normalization を適用することで得られる例外列を表したものである．

このようにして得られた例外列は 171 種類になり，また初等的な分岐の組み合わせによって長さ最大の例外列はこの 171 種類のいずれかに一致することがわかる．したがって問題は，これらの例外列のすべてが例外生成列であるかどうかである．

Theorem 3.4. 任意の X 上の長さ 12 の直線束からなる例外列は例外生成列である．

Proof. (Outline) 変異関手は生成性を保つから，命題内の B_6 を第 2 項に持つ 15 の例外列に対して示せば十分である．Orlov's projective bundle formula (Theorem 2.9) から例外列 (1) は例外生成列である．更に，(1) の b_0，b_1，b_2 に適切な値を代入し，Proposition2.19 を適用することで (2) から (15) の列も得られる．ここに Proposition2.14 を使えば生成性を示すことができる． □

以上により，主定理が示された．

2. $(a,b)=(-1,-2),(-1,1),(-2,-1),(-2,1),(-4,0),(-4,2),(-5,0),(-5,3)$.

Proof. (Outline) $\mathscr{O}_X(aH+bE)$ が cohomologically zero であれば，$\chi(\mathscr{O}_X(aH+bE))=0$ であるので，$a+2b=-1,-2-3$ もしくは $f(a,b)=0$ が成り立つ．従って上記の候補が導かれるが，それらが実際に cohomologically zero であることは各々のコホモロジーの消滅を計算することによって示す． □

Remark. 上の命題で挙げられた cohomologically zero 直線束の一覧は，すべての $\chi=0$ の整数解を列挙しているわけではない．しかし，今後の議論によって絶対値の大きい整数解は，主定理の証明のためには考慮する必要がないことがわかる．

ここで，今後の煩雑さを避けるため，divisor に関する Notation を導入しておく．
$B_{0,b_0}=(1+2b_0)H-b_0E$, $B_{1,b_1}=(2+2b_1)H-b_1E$, $B_{2,b_2}=(3+2b_2)H-b_2E$, $B_3=H+2E$, $B_4=H-E$, $B_5=2H+E$, $B_6=2H-E$, $B_7=4H$, $B_8=4H-2E$, $B_9=5H$, $B_{10}=5H-3E$.

$\{\mathscr{O},\mathscr{O}(D_1,\ldots,\mathscr{O}(D_k))\}$ が正規化された直線束からなる例外列であるとする．このとき第 2 項以降，cohomologically zero 直線束であったから，Prroposition3.2 により，各 D_i は B_j $(j=1,2,\ldots,10)$ に一致する．また，半直交性から任意の $i<j$ に対して，

$$0=\mathrm{Hom}(\mathscr{O}(D_j),\mathscr{O}(D_i))=H^i(\mathscr{O}(D_i-D_j))$$

が成り立つ．表 1 は，$i,j=0,\ldots,10$ に対し，その差が再び cohomologically zero であるかどうかを示した図である．例えば，B_4 と B_5 のチェックマークは，$\mathscr{O}(B_5-B_4)$ が B_i のいずれかに一致する，つまり cohomologically zero 直線束になることを示している．表 1 を用いると，直線束からなる例外列を作ることができる．例えば，第 2 項として B_7 をとると，表の行をみることで，第 3 項以降に来うるのは $B_{2,-1}$，$B_{2,3}$，B_3，B_9 に限られることがわかる．更に第 3 項として B_9 をとると，同様に表からこの例外列は長さが 4 以上になることはないことがわかる．

簡単のため，正規化された例外列 $\{\mathscr{O},\mathscr{O}(D_1),\ldots,\mathscr{O}(D_k)\}$ を $\{D_1,\ldots,D_k\}$ と略記する．

	B'_0	B'_1	B'_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}
B_0	$b'_0=b_0+1$, b_0+2	✓	✓	$b_0=-1$, -2		✓	$b_0=0$, -2	✓	$b_0=1$, -1	$b_0=0$, 1	
B_1	$b'_0=b_1+1$, b_1+3	$b'_1=b_1+1$, b_1+2	✓	✓		✓		✓		✓	
B_2		$b'_1=b_2+1$, b_2+3	$b'_2=b_2+1$, b_2+2	✓		✓		✓		✓	
B_3						✓				✓	
B_4	✓	✓	$b'_2=0,\ 1$			✓	✓		✓		✓
B_5			$b'_2=0,\ 2$	✓				✓		✓	
B_6	✓	✓	✓					✓	✓		
B_7			$b'_2=1,\ 3$	✓						✓	
B_8	✓	✓	✓							✓	✓
B_9											
B_{10}	✓	✓	$b'_2=2,3$		✓		✓		✓		

表 1: 例外列となる直線束のペア

Proposition 2.19. 三角圏 $\mathcal{D}$ が半直交分解 $\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1}, \ldots, \mathcal{C}_n \rangle$ を持ちかつ，ある k について，$\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1}) = 0$ を満たすとする．このとき，

$$\mathbb{L}_{\mathcal{C}_k}(\mathcal{C}_{k+1}) = \mathcal{C}_{k+1}, \quad \mathbb{R}_{\mathcal{C}_{k+1}}(\mathcal{C}_k) = \mathcal{C}_k$$

である．つまり，この場合変異関手は半直交分解の隣り合った 2 つの成分を入れ替える作用になるのである．

Example 2.20. (Mutations of full exceptional collections) $\{E_1, \ldots, E_l\}$ を $D^b(X)$ の例外生成列とする．$\mathcal{C}_1 = \langle E_1 \rangle$，$\mathcal{C}_2 = \langle E_2, \ldots, E_l \rangle$ とみることにより, Proposition 2.18 を適用して，次の例外生成列を得る:

$$\{E_2, \ldots, E_l, E_1 \otimes \omega^{-1}\}.$$

本稿では，例外生成列 $\langle \mathscr{O}_X(D_0), \ldots, \mathscr{O}_X(D_n) \rangle$ から Proposition 2.18 を適用し，正規化することによって例外生成列

$$\langle \mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X(D_2 - D_1), \ldots, \mathscr{O}_X(D_n - D_1), \mathscr{O}_X(D_0 - K_X - D_1) \rangle$$

を得る操作を"*mutation of Serre type and normalization*" と呼ぶことにする．

3 定理 1.4 の証明の概略

本節では，主定理 1.4 の証明概要を紹介する．また，節を通じて，Y を Segre 埋め込み $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^5$ の像，$X := \mathrm{Bl}_Y \mathbb{P}^5$ とする．定理 1.5 の証明は 1.4 とパラレルである．初めに，Grothendieck-Riemann-Roch を用いて $\chi(\mathscr{O}_X(aH + bE))$ を計算する．

Proposition 3.1.

$$\chi(\mathscr{O}_X(aH + bE)) = \frac{1}{120}(a + 2b + 1)(a + 2b + 2)(a + 2b + 3) f(a, b),$$

where $f(a, b) := a^2 - 6ab - 6b^2 + 9a - 12b + 20$.

Proof. (Outline)

- Normal bundle $\mathscr{N}_{Y_0/\mathbb{P}^5}$ の Chern 類を計算する，
- 交点数 $H^i.E^{5-i} \quad (i = 0 \sim 5)$ を計算する，
- 以上の結果を用いて，次の Hirzebruch-Riemann-Roch の定理から従う．

$$\chi(\mathscr{O}_X(aH + bE)) = \int_X \mathrm{ch}(\mathscr{O}_X(aH + bE)) \mathrm{Td}(X).$$

□

上の計算結果を用いると，cohomologically zero 直線束を分類することができるのである．

Proposition 3.2. $\mathscr{O}_X(aH + bE)$ は，次のいずれかを満たせば cohomologically zero 直線束である．

1. $a + 2b = -1, -2, -3,$

Proposition 2.13. (例外列の正規化 [LYY19, Lemma 3.4]) 直線束からなる例外列 $\{\mathscr{O}_X(D_0), \cdots, \mathscr{O}_X(D_n)\}$ に対して，$\mathscr{O}_X(-D_0)$ をテンソルすることによって得られる列，$\{\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X(D_1 - D_0), \cdots, \mathscr{O}_X(D_n - D_0)\}$，は再び例外列である．更に，もとの例外列が生成列であることと，その正規化が生成列であることは同値である．

Proposition 2.14. ([LYY19, Lemma 2.9]) $\mathcal{D}$ 内の二つの例外列が，同じ長さを持ちかつ高々一つの対象のみ異なる成分を持つとき，片方の例外列が生成列であることともう一方が生成列であることは同値である．

Definition 2.15. (Cohomologically zero 直線束) $\mathscr{L}$ を非特異射影代数多様体 X 上の直線束とする．$\mathscr{L}$ が *cohomologically zero* 直線束であるとは，任意の i に対して，$H^i(X, \mathscr{L}) = 0$ が成り立つときをいう．

Remark. X の導来圏 $D^b(X)$ が直線束からなる (正規化された) 例外生成列 $\{\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X(D_1), \ldots, \mathscr{O}_X(D_l)\}$ を持つとする．このとき各直線束 $\mathscr{O}_X(-D_i)$ は cohomologically zero である．実際，半直交分解 $D^b(X) = \langle \mathscr{O}_X, \ldots, \mathscr{O}_X(D_l) \rangle$ の半直交性から，

$$H^i(\mathscr{O}_X(-D_j)) = \mathrm{Hom}_{D^b(X)}(\mathscr{O}_X(D_j), \mathscr{O}_X[i]) = 0$$

となるのである．

2.4 変異関手

導来圏の半直交分解や例外生成列は一般に一意には定まらない．特に，一つの半直交分解からその順番を入れ替えることで別の分解表示を作り出す操作が存在する．この操作は変異関手を通じて定義される．より詳細には，[BK89] を参照されたい．

Definition 2.16. (変異関手) $\mathcal{C}$ を $\mathcal{D}$ の許容部分三角圏とする．このとき，各対象 $F \in \mathcal{D}$ に対し，次の二つの完全三角が存在する:

$$\mathbb{R}_{\mathcal{C}}(F) \longrightarrow F \longrightarrow ii^*(F) \xrightarrow{[1]} \mathbb{R}_{\mathcal{C}}(F)[1],$$

$$ii^!(F) \longrightarrow F \longrightarrow \mathbb{L}_{\mathcal{C}}(F) \xrightarrow{[1]} ii^!(F)[1].$$

これらの対応によって，右変異関手 $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ と左変異関手 $\mathbb{L}_{\mathcal{C}}$ を定める．

Proposition 2.17. 三角圏の半直交分解 $\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_l \rangle$ が存在するとする．このとき，変異関手は次の半直交分解を誘導する．

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{i-2}, \mathcal{C}_i, \mathbb{R}_{\mathcal{C}_i}(\mathcal{C}_{i-1}), \ldots, \mathcal{C}_l \rangle,$$

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{i-1}, \mathbb{L}_{\mathcal{C}_i}(\mathcal{C}_{i+1}), \mathcal{C}_i, \ldots, \mathcal{C}_l \rangle.$$

Proposition 2.18. 非特異射影代数多様体 X が，2 つの成分からなる半直交分解 $D^b(X) = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \rangle$ を持つとする．このとき，変異関手は次のように表現される：

$$\mathbb{R}_{\mathcal{C}_2}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_1 \otimes \omega_X^{-1}, \quad \mathbb{L}_{\mathcal{C}_1}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_2 \otimes \omega_X.$$