

軌道ハープの string-elevation の比較定理

青木 侑省 (名古屋工業大学 D2)*¹

足立 俊明 (名古屋工業大学)

1 軌道ハープ

リーマン多様体上の閉 2 形式 $\mathbb{B}$ は磁場とよばれる。特に κ を定数とすると、ケーラー多様体 M 上の磁場 $\mathbb{B}_\kappa$ を複素構造 J を使って $\mathbb{B}_\kappa(v, w) = \langle v, \kappa Jw \rangle$ で定め、これをケーラー磁場という。磁場 $\mathbb{B}_\kappa$ に対して、弧長で径数付けられた滑らかな曲線 γ が微分方程式 $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \kappa J \dot{\gamma}$ を満たすときケーラー磁場 $\mathbb{B}_\kappa$ の軌道という。特に $\kappa = 0$ の場合、軌道は測地線となる。

非自明なケーラー磁場 $\mathbb{B}_\kappa$ に関する軌道 $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ が $0 < t < T$ で $\gamma(t) \neq \gamma(0)$ となる場合に、測地線による滑らかな変分 $\alpha_\gamma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow M$ が次を満たすとき α_γ を γ に関する軌道ハープという。

- i) $\alpha_\gamma(t, 0) = \gamma(0)$,
- ii) $t = 0$ のとき、曲線 $s \mapsto \alpha_\gamma(0, s)$ は初期ベクトル $\dot{\gamma}(0)$ の測地線,
- iii) $t > 0$ のとき、曲線 $s \mapsto \alpha_\gamma(t, s)$ は $\gamma(0)$ と $\gamma(t)$ を結ぶ単位スピードの測地線。

$\gamma(0)$ と $\gamma(t)$ を結ぶ測地線分 $s \mapsto \alpha_\gamma(t, s)$ を弦といい、軌道 γ をアーチという。軌道 γ の像 $\gamma([0, T])$ が $p = \gamma(0)$ を中心とし p での単射半径 ι_p を半径とする閉球 $B_{\iota_p}(p)$ に含まれるとき、 $\gamma(0)$ と $\gamma(t)$ を一意に定まる最短測地線で結ぶことで軌道ハープを得ることができる。 $t > 0$ で $\gamma(0)$ から $\gamma(t)$ までの測地線分 $s \mapsto \alpha_\gamma(t, s)$ の長さを $\ell_\gamma(t)$ で表す。ただし、 $\ell_\gamma(0) = 0$ とする。 $\ell_\gamma(t)$ を $\gamma(t)$ の string-length と呼ぶ。軌道 γ は弧長で径数付けられているので、明らかに $0 < t \leq T$ で $\ell_\gamma(t) \leq t$ となる。軌道の初速度ベクトル $\dot{\gamma}(0)$ と t における弦の $s = 0$ での速度ベクトルのなす角の余弦 $\eta_\gamma(t) := \left\langle \dot{\gamma}(0), \frac{\partial \alpha_\gamma}{\partial s}(t, 0) \right\rangle$ を取り、これを $\gamma(t)$ の string-elevation という。複素空間 $\mathbb{C}^n$ 、複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$ 、複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ を合わせた正則断面曲率 c の複素空間系 $\mathbb{C}M^n(c)$ 上のケーラー磁場 $\mathbb{B}_\kappa$ の軌道ハープの string-length、string-elevation は軌道ハープの取り方によらない。よって複素空間系 $\mathbb{C}M^n(c)$ 上の $\mathbb{B}_\kappa$ の軌道ハープの string-length、string-elevation をそれぞれ $\ell_\kappa(t; c)$ 、 $\eta_\kappa(t; c)$ と表す。ここで $0 < t < 2\pi/\sqrt{\kappa^2 + c}$ のとき $\eta_\kappa(t; c)$ は次で与えられる。

$$\eta_\kappa(t; c) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\kappa^2 + c} \cos(\sqrt{\kappa^2 + c} t/2)}{\sqrt{\kappa^2 + c} \cos^2(\sqrt{\kappa^2 + c} t/2)} & (\kappa^2 + c > 0 \text{ のとき}) \\ \frac{2}{\sqrt{|c|t^2 + 4}} & (\kappa^2 + c = 0 \text{ のとき}) \\ \frac{\sqrt{|c| - \kappa^2} \cosh(\sqrt{|c| - \kappa^2} t/2)}{\sqrt{|c| \cosh^2(\sqrt{|c| - \kappa^2} t/2) - \kappa^2}} & (\kappa^2 + c < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

*¹ e-mail: clf14002@nitech.jp

また、 $\ell_\kappa(t; c)$ は例えば $\mathbb{C}H^n(c)$ の場合、次の関係式を満たすものとして与えられる。

$$\begin{cases} \sqrt{\kappa^2 + c} \sinh(\sqrt{|c|} \ell_\kappa(t; c)/2) = \sqrt{|c|} \sin(\sqrt{\kappa^2 + c} t/2) & (\kappa^2 + c > 0 \text{ のとき}) \\ 2 \sinh(\sqrt{|c|} \ell_\kappa(t; c)/2) = \sqrt{|c|} t & (\kappa^2 + c = 0 \text{ のとき}) \\ \sqrt{|c| - \kappa^2} \sinh(\sqrt{|c|} \ell_\kappa(t; c)/2) = \sqrt{|c|} \sinh(\sqrt{|c| - \kappa^2} t/2) & (\kappa^2 + c < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

また、 $\mathbb{C}P^n(c)$ では、次の関係式を満たすものとして与えられる。

$$\sqrt{\kappa^2 + c} \sin(\sqrt{|c|} \ell_\kappa(t; c)/2) = \sqrt{|c|} \sin(\sqrt{\kappa^2 + c} t/2)$$

2 比較定理

複素空間系 $\mathbb{C}M^n(c)$ 上で $\mathbb{B}_\kappa$ 軌道 γ に関する軌道ハープ α_γ に対し $R(\kappa; c)$ を

$$R(\kappa; c) = \begin{cases} \pi/\sqrt{\kappa^2 + c} & (\kappa^2 + c > 0 \text{ のとき}) \\ \infty & (\kappa^2 + c \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与える。また、正数 $T_\gamma(c)$ を次のように定義する。 $0 < t_* \leq T$ で $\ell_\gamma(t_*) = \ell_\kappa(R(\kappa; c); c)$ を満たす t_* が存在するとき $T_\gamma(c) = \min\{t_*\}$ とし、それ以外の場合 $T_\gamma(c) = T$ とする。複素空間系上の string-length $\ell_\kappa(t; c)$ の t に関する逆関数を $\tau_\kappa(s; c)$ とする。 $0 \leq a < b \leq T$ に対して、 $\mathcal{HB}_\gamma(a, b) = \{\alpha_\gamma(t, s) \mid a \leq t \leq b, 0 \leq s \leq \ell_\gamma(t)\}$ を取り、これを α_γ の harp-body という。 $\mathcal{HB}_\gamma(0, b)$ を $\mathcal{HB}_\gamma(b)$ と表す。

定理 ケーラー多様体 M 上の非自明なケーラー磁場 $\mathbb{B}_\kappa$ の軌道 $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ に関する軌道ハープ α_γ をとる。harp-body $\mathcal{HB}_\gamma(T)$ の接平面の断面曲率が定数 c 以下と仮定すると次が得られる。

$$\eta_\gamma(t) \geq \eta_\kappa(\tau_\kappa(\ell_\gamma(t); c); c), \quad \eta'_\gamma(t) \geq \eta'_\kappa(\tau_\kappa(\ell_\gamma(t); c); c) \quad (0 < t \leq T_\gamma(c))$$

特に、 $R(\kappa; c) \geq T_\gamma(c)$ となる。さらに、上の等号が成り立つ場合に次を得る。

- (1) ある t_0 ($0 < t_0 \leq T_\gamma(c)$) で $\eta_\gamma(t_0) = \eta_\kappa(\tau_\kappa(\ell_\gamma(t_0); c); c)$ となる場合、次が成り立つ。
 - 1) string-elevation の微分が $\eta'_\gamma(t_0) = \eta'_\kappa(\tau_\kappa(\ell_\gamma(t_0); c); c)$ を満たす。
 - 2) ベクトル $\frac{\partial \alpha_\gamma}{\partial t}(t_0, s)$ は $0 \leq s \leq \ell_\gamma(t_0)$ で $J \frac{\partial \alpha_\gamma}{\partial s}(t_0, s)$ に平行。
- (2) ある t_0 ($0 < t_0 \leq T_\gamma(c)$) で $\eta_\gamma(t_0) = \eta_\kappa(t_0; c)$ が成り立つとき、harp-body $\mathcal{HB}_\gamma(t_0)$ は全測地的、正則であり、定断面曲率 c を持つ。特に、 $0 \leq t \leq t_0$ において $\eta_\gamma(t) = \eta_\kappa(t; c)$ が成り立つ。

参考文献

- [1] T. Adachi, *A theorem of Hadamard-Cartan type for Kähler magnetic field*, J. Math. Soc. Japan 64 (2012), 1-21.
- [2] Y. Aoki and T. Adachi, in preparation.