Progress of Geometric
Structures on Manifolds
Meijo Univ., March 4–7, 2014

ケーラーグラフのラプラシアン

ヤリママト　トルソンママト

名古屋工業大学大学院 情報工学専攻

概略 ケーラー磁場を持つケーラー多様体の離散化としてケーラーグラフを導入し、このグラフ上で磁場の軌道に対応する (p,q)– 2 色彩道によるランダム・ウォークを生成するラプラス作用素を定義する。ケーラーグラフのいくつかの構成方法を述べ、それらに対するラプラス作用素の固有値を求め、等スペクトルケーラーグラフの組みが豊富に存在することを示す。

1．はじめに

グラフは頂点の集合と向き付けられていない辺の集合の組で、リーマン幾何学においては非正曲率多様体の離散モデルとして捉えられる。このグラフ上の連続する辺の列である道はリーマン幾何学の測地線に対応する物とされている。では幾何構造を持つリーマン多様体の幾何構造を含めた離散化はどのように考えればよいのであろうか。本講演では磁場を持つ多様体の離散化という観点から考察を行うことにする。

リーマン多様体上の閉 2 形式を磁場という。磁場 $\mathbb{B}$ に対して $\mathbb{B}(v,w) = \langle v, \Omega_{\mathbb{B}}(w)\rangle$ という関係で定まる歪対称自己同型 $\Omega_{\mathbb{B}}$ を取り、弧長で係数付けられた滑らかな曲線 γ が $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \Omega_{\mathbb{B}}(\dot\gamma)$ を満たすとき磁場の軌道であるという。物理的には $\Omega_{\mathbb{B}}$ がローレンツ力を表し、磁場の下での荷電粒子の運動を軌道が表している。

離散化を考える上で重要なことは、対象物の全ての性質を引き継ぐように離散化することは不可能であるので、どの性質に注目するかという点である。[1] において磁場を持つ多様体の離散化として、磁場の離散化には触れずに軌道をどのように考えればよいかという点に注目して、ケーラーグラフが提案されている。ケーラーグラフは、頂点の集合と主辺の集合、補助辺の集合の 3 つから成っていて、主辺と補助辺という 2 種類の辺を用いることで軌道を表現している。本講演ではケーラーグラフのラプラシアンの固有値について述べ、等スペクトルなケーラーグラフの組の例を挙げることにする。この内容は足立俊明氏との共同研究の一部分である。なお、本講演を通じてグラフはループや多重辺は持たない単純グラフとする。

2．ケーラーグラフ

頂点の集合 V と (向きのない) 辺の集合 E との組みであるグラフ $G = (V,E)$ において、2 つの頂点 $v, v' \in V$ がある辺で結ばれているとき隣接しているといって $v \sim v'$ と表す。隣接する頂点の列 $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ を n-ステップ道といい、その始点 v_0 を $o(\gamma)$ とまた終点 v_n を $t(\gamma)$ と表す。1-ステップ道は辺のことであり、向き付けられてはいないがこの記号を利用することにする。

グラフ $G=(V,E)$ が**ケーラー**であるとは、辺集合 E が 2 つの部分集合 $E^{(p)}$, $E^{(a)}$ に分割されていて、各頂点 $v\in V$ に対して v を始点とする $E^{(p)}$ に属する辺 (**主辺**という) が 2 本以上存在し、かつ v を始点とする $E^{(a)}$ に属する辺 (**補助辺**という) もが 2 本以上存在することをいう。分割された辺集合を使ってできる 2 つのグラフ $(V,E^{(p)})$, $(V,E^{(a)})$ をそれぞれ**主グラフ**、**補助グラフ**という。本来複素数という実 2 次元的な対象物をグラフという 1 次元的なもので表現するため完全な対応が見られるわけではないが、1 つの提案として意味を持つことを次節で述べることにする。

ケーラーグラフ $G=(V,E^{(p)}\cup E^{(a)})$ の 2 つの頂点 $v,v'\in V$ が主グラフ $(V,E^{(p)})$ で隣接しているとき $v\sim_p v'$ と表し、また補助グラフ $(V,E^{(a)})$ で隣接しているとき $v\sim_a v'$ と表す。頂点 $v\in V$ に対して

$$d_G^{(p)}(v)=\sharp\{w\in V\mid w\sim_p v\},\quad d_G^{(a)}(v)=\sharp\{w\in V\mid w\sim_a v\}$$

と定めそれぞれ主次数、補助次数という。ただし、集合 X に対して $\sharp X$ は基数を表すものとする。従って v におけるグラフの次数 $d_G(v)=\sharp\{w\in V\mid w\sim v\}$ は $d_G(v)=d_G^{(p)}(v)+d_G^{(a)}(v)$ となる。

例 1. 有限グラフ $G=(V,E)$ に対して補グラフ $G^c=(V,E^c)$ は、異なる 2 つの頂点が G^c で隣接している必要十分条件は G で隣接していないこととして定義される。グラフ G が各頂点 v において $2\le d_G(v)\le \sharp V-3$ を満たせば $G^K=(V,E\cup E^c)$ はケーラーグラフで完全なグラフである。ここでグラフが完全であるとは、異なる 2 つの頂点は辺で結ばれていることをいう。

グラフの積を取る操作はケーラーグラフに対しても成立する。2 つのグラフ $G=(V,E)$, $H=(W,F)$ は $\min_{v\in V}d_G(v)\ge 2$, $\min_{w\in W}d_H(w)\ge 2$ を満たしているとする。このとき、カルタン積型 $G\widehat{\square}H$ 強積型 $G\widehat{\boxtimes}H$ 半テンソル積型 $G\widehat{\otimes}H$ 辞書式積型 $G\triangleright H$ のケーラーグラフは次のように定義される。

i) これらのグラフの頂点集合は $V\times W$ とする
ii) 2 つの頂点 (v,w), $(v',w')\in V\times W$ が主辺で隣接しているための必要十分条件は v, v' が G で隣接し $w=w'$ であることとする
iii) 2 つの頂点 (v,w), $(v',w')\in V\times W$ が補助辺で隣接しているための必要十分条件は、それぞれの型に応じて以下で定める
   a) カルタン積型 $G\widehat{\square}H$ では、$v=v'$ かつ w, w' が H で隣接していることとする
   b) 強積型 $G\widehat{\boxtimes}H$ では、「$v=v'$ かつ w, w' が H で隣接している」か「v, v' が G で隣接していて w, w' が H で隣接していること」とする
   c) 半テンソル積型 $G\widehat{\otimes}H$ では、v, v' が G で隣接していて、かつ w, w' が H で隣接していることとする
   d) 辞書式積型 $G\triangleright H$ では、w, w' が H で隣接していることとする。

これらの 4 種類のグラフはケーラーグラフになる。

３．ケーラーグラフの２色彩道

ケーラーグラフにおいて磁場による軌道を表現するために 2 色に彩色された道を考えることにする。互いに素な正の整数の組み (p,q) を取る。$(p+q)$-ステップ道 $\gamma=(v_0,\dots,v_{p+q})$ が $(p+q)$-ステップ**基本 2 色彩道**であるとは

i) $v_{i+1}\neq v_{i-1}$ for $1\leq i\leq p+q-1$,
ii) $v_{i-1}\sim_p v_i$ for $1\leq i\leq p$,
iii) $v_{i-1}\sim_a v_i$ for $p+1\leq i\leq p+q$.

という条件を満たすことをいう。また $m(p+q)$-ステップ道 $\gamma=(v_0,\dots,v_{m(p+q)})$ について、各 $(p+q)$-ステップ道 $\gamma_j=(v_{(j-1)(p+q)},\dots,v_{j(p+q)})$, $j=1,\dots,m$ が $(p+q)$-ステップ基本 2 色彩道であるとき $(p+q)$-ステップ **2 色彩道**であるという。このような道を考える意味は、ケーラーグラフにおいては主グラフの道を測地線に対応する物と考え、磁力が q/p である一様磁場の下では p-ステップの主グラフ内の道 (測地線) が磁力により曲げられて、その終点が最初の p-ステップが一致する $(p+q)$-ステップ基本 2 色彩道の終点へと流されてしまうことを表している。

しかし、グラフは 2 次元的な構造を有しておらず、ここではケーラーグラフ上の磁場に相当するものを定義せずに、磁場の下での軌道を与えているため、主グラフ上の p-ステップ道の終点がこの磁場によりどこに流されるか明示することはできない。そこで、全ての (p,q)-ステップ 2 色彩道の終点を考慮に入れて確率論的に扱うことにする。(p,q)-ステップ基本 2 色彩道 $\gamma=(v_0,\dots,v_{p+q})$ に対して、その**確率的重み** $\omega(\gamma)$ を

$$\omega(\gamma)=\frac{1}{d_G^{(a)}(v_p)\prod_{j=p+1}^{p+q-1}\{d_G^{(a)}(v_j)-1\}}.$$

と定義する。そして (p,q)-ステップ 2 色彩道 $\gamma=\gamma_1\cdot\gamma_2\cdots\gamma_m$ (ただし γ_i は (p,q)-ステップ基本 2 色彩道) に対しては、その確率的重みを $\omega(\gamma)=\prod_{i=1}^m\omega(\gamma_i)$ と定義する。

４．有限ケーラーグラフのラプラシアン

有限グラフ $G=(V,E)$ に対して頂点集合上の (複素) 関数の集合を $C(V)$ と表す。このベクトル空間に作用するグラフの隣接作用素 A と推移作用素 P は

$$Af(v)=\sum_{w\sim v}f(w),\qquad Pf(v)=\frac{1}{d_G(v)}\sum_{w\sim v}f(w),$$

として与えられた。隣接作用素はグラフ上のランダムウォークの生成作用素になっている。グラフ G の次数作用素を D_G と表す、すなわち $D_Gf(v)=d_G(v)f(v)$ と定義される作用素である。これと恒等作用素 I とを用いて $\Delta_A=D_G-A$, $\Delta_P=I-P$ と定め、それぞれ組合せラプラシアン、推移ラプラシアンとよばれ、リーマン多様体におけるラプラス作用素の離散版と考えられている。なお、グラフ G が正則であるとき、すなわち $d_G(v)$ が頂点 v によらずに一定であるとき $\Delta_A=d_G\Delta_P$ となる。

有限ケーラーグラフ $G=(V,E^{(p)}\cup E^{(a)})$ において、互いに素な正の整数の組み (p,q) に対して、$v\in V$ を始点とする (p,q)-ステップ基本 2 色彩道全体の集合を $\mathcal{P}_v^{p,q}$ と表す。(p,q)-ステップ**隣接作用素** $A_{p,q}$ と (p,q)-ステップ**推移作用素** $P_{p,q}$ を

$$A_{p,q}f(v)=\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_v^{p,q}}\omega(\gamma)f\bigl(t(\gamma)\bigr),\qquad P_{p,q}f(v)=\frac{1}{\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_v^{p,q}}\omega(\gamma)}\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_v^{p,q}}\omega(\gamma)f\bigl(t(\gamma)\bigr)$$

と定める。ここでこれらの作用素は一般には対称作用素ではない点に注意しておく。この (p,q)-ステップ隣接作用素は (p,q)-ステップ基本 2 色彩道によるランダムウォークの生成作用素である。主グラフ上において v を始点とする戻りのない p-ステップ道の個数を $d_p^{(p)}(v)$ で表して作用素 D_p を $D_pf(v)=d_p^{(p)}(v)f(v)$, と定める。これを用いて $\Delta_{A_{p,q}}=D_p-A_{p,q}$, $\Delta_{P_{p,q}}=I-P_{p,q}$ と定義し、それぞれ組合せ (p,q)-ラプラシアン、推移 (p,q)-ラプラシアンという。これらの作用素の関係は、主グラフが正則であるとき $A_{p,q}=d_G^{(p)}\{d_G^{(p)}-1\}^{p-1}P_{p,q}$ であり $D_p=d_G^{(p)}\{d_G^{(p)}-1\}^{p-1}I$ となることから $\Delta_{A_{p,q}}=d_G^{(p)}\{d_G^{(p)}-1\}^{p-1}\Delta_{P_{p,q}}$. という関係を満たす。

ここで $(1,1)$-ステップ隣接作用素と $(1,1)$-ステップ推移作用素を主グラフの隣接作用素 $A^{(p)}$ と推移作用素 $P^{(p)}$ 及び補助グラフの推移作用素 $P^{(a)}$ を用いて表すと $A_{1,1}=A^{(p)}P^{(a)}$, $P_{1,1}=P^{(p)}P^{(a)}$ となる。一般に (p,q)-ステップの場合も主グラフの戻りのない p-ステップ隣接作用素と推移作用素及び補助グラフの戻りのない q-ステップ推移作用素を用いて分解表現することができる。

5．(1,1)-ラプラシアンの固有値

ここでいくつかの種類のケーラーグラフについて、その $(1,1)$-ラプラシアンの固有値を計算しておく。特に $(1,1)$-ステップの場合を取り上げた理由は、この場合には道に戻りがないことに注意する必要がないからである。ケーラーグラフにおいて主辺と補助辺がそれぞれ各頂点から 2 本以上出ていることを条件としたが、これは戻りがない道の存在を保証するためである。$(1,1)$-ステップだけを考える場合は、道の戻りを考慮する必要がないため、主辺と補助辺がそれぞれ各頂点から 1 本以上出ていれば十分である。

ケーラーグラフが**正則**であるとは、主グラフ補助グラフ共に正則であることをいう。正則なケーラーグラフが完全グラフであるとき**完全ケーラーグラフ**という。

定理 1 ([5]). 有限連結正則グラフ $G=(V,E)$ は $2\le d_G\le m-3$ $(m=\sharp V)$ を満たしているとする。G の組合せラプラシアン Δ_A の固有値を $0=\lambda_1<\lambda_2\le\cdots\le\lambda_m$ と表す。このとき、補グラフを用いて作られるケーラーグラフ $G^K=(V,E\cup E^c)$ の組合せ $(1,1)$-ラプラシアンの固有値は
$\widehat{\lambda}_1=0,\ \widehat{\lambda}_i=\{\lambda_i^2-\lambda_i(2d_G+1)+md_G\}/(m-d_G-1)\ \ (i=2,\ldots,m)$
である。

証明 固有関数 f_i を取ると $\Delta_Af_i=\lambda_if_i$ より $A_Gf_i=(d_G-\lambda_i)f_i$ となる。一方補グラフ G^c について、次数は $d_{G^c}=m-d_G-1$ であり、また隣接作用素は

$A_{G^c} = M - I - A_G$ となる。ただし M は $Mf(v) = \sum_{w\in V} f(w)$ として定まる作用素である。

G が連結であるため $\lambda_1 = 0$ に対する固有関数は定数関数であるから $A_{G^c}f_1 = (m-1)f_1$ となる。一方 $i \geq 2$ の場合には、A_G の対称性より固有関数 f_i が定数関数と直交することから $Mf_i = 0$ であり $A_{G^c}f_i = (\lambda_i - d_G - 1)f_i$ である。$A_{1,1} = A_G P_{G^c} = d_{G^c}^{-1} A_G A_{G^c}$ であり $\Delta_{A_{1,1}} = d_G I - A_{1,1}$ であるから結論を得る。 □

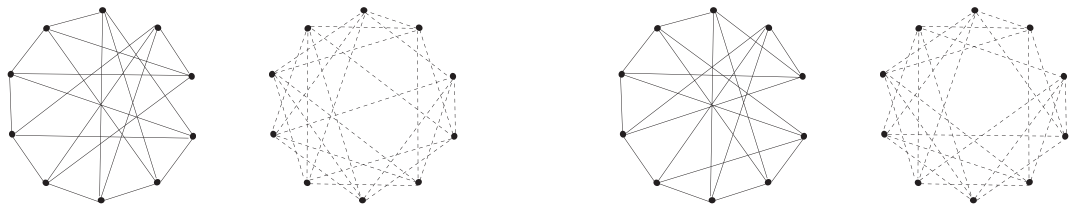
２つの有限グラフは、それらの組合せ (推移) ラプラシアンが重複度を込めて同じ固有値を持つとき、組合せ (推移) 等スペクトルであるといわれる。２つのグラフが正則であれば２つの等スペクトル性は同値であるため単に等スペクトルという。２つのケーラーグラフについて、それらの主グラフが組合せ (推移) 等スペクトルであり、かつ組合せ (推移) $(1,1)$-ラプラシアンが重複度を込めて同じ固有値を持つとき、**組合せ (推移)(1,1)-等スペクトル**であるということにする。これらのケーラーグラフの主グラフが共に正則であれば２つの等スペクトル性は同値になる。

系 1. ２つの有限連結正則グラフ G_1, G_2 が等スペクトルであれば、補グラフを用いて作られるケーラーグラフ G_1^K, G_2^K は $(1,1)$-等スペクトルである。

有限連結正則グラフの組で等スペクトルになるものは無限個あることが知られており ([2])、$(1,1)$-等スペクトルな完全ケーラーグラフの組みも無限個あることがわかる。

例 2. 下図は等スペクトルな正則グラフとその補グラフを用いてできる $(1,1)$-等スペクトルなケーラーグラフの例を表している。ただし、主グラフと補助グラフとを別々に表した。これらの主グラフの組合せラプラシアンの固有値と組合せ $(1,1)$-ラプラシアンの固有値は以下の通りである。

$\mathrm{Spec}(\Delta_{A_G}) = \{0, 3, 5, 5, 5, 5, 4-\sqrt{5}, 4+\sqrt{5}, (9-\sqrt{17})/2, (9+\sqrt{17})/2\}$,
$\mathrm{Spec}(\Delta_{A_{1,1}}) \ = \{0, 4, 4, 4, 4, 22/5, 24/5, 24/5, (25-\sqrt{5})/5, (25+\sqrt{5})/5\}$.



積型ケーラーグラフに対しては次が成り立つ。

定理 2 ([5]). ２つの有限グラフ $G = (V, E)$, $H = (W, F)$ の推移ラプラシアン Δ_{P_G}, Δ_{P_H} の固有値をそれぞれ μ_i $(i = 1, \ldots, m = \sharp V)$ および ν_α $(\alpha = 1, \ldots, n = \sharp W)$ と表す。

(1) $G\widehat{\square}H$ の推移 $(1,1)$-ラプラシアンの固有値は $\mu_i + \nu_\alpha - \mu_i\nu_\alpha$ である。

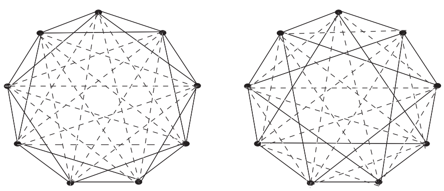
(2) G が正則であれば、$G\widehat{\boxtimes}H$ の推移 $(1,1)$-ラプラシアンの固有値は
$\{(1 + d_G - d_G\mu_i)(\mu_i + \nu_\alpha - \mu_i\nu_\alpha) + d_G\mu_i\}/(d_G + 1)$ である。

(3) $G\widehat{\otimes}H$ の推移 $(1,1)$-ラプラシアンの固有値は $(1-\mu_i)(\mu_i+\nu_\alpha-\mu_i\nu_\alpha)+\mu_i$ である。
(4) $G\triangleright H$ の推移 $(1,1)$-ラプラシアンの固有値は $1,\dots,1,\nu_1,\dots,\nu_n$ である。ここで 1 の重複度は $n(m-1)$ である。
(5) G が正則であれば、これらの積型ケーラーグラフの組合せ $(1,1)$-ラプラシアンの固有値は上記の d_G 倍になる。

証明の方針 主グラフと補助グラフの隣接作用素を行列の形で具体的に表現する。$A_G=(a^G_{k\ell})$, $P_H=(p^H_{ab})$ とすると、カルタン積型では $A^{(p)}_{G\widehat{\Box}H}=(a^G_{k\ell}\delta_{ab})$, $P^{(a)}_{G\widehat{\Box}H}=\delta_{k\ell}p^H_{ab})$ である。そこで $\Delta_{P_G}f_i=\mu_i f_i$ $\Delta_{P_H}g_\alpha=\nu_\alpha g_\alpha$ という固有関数に対して、直積関数 $\varphi_{i\alpha}=(f_i,g_\alpha)$ を考えると $\Delta_{P_{1,1}}$ の固有関数になる。 □

系 2. 2 組の推移等スペクトルなグラフの組み G_1,G_2 と H_1,H_2 に対して
(1) 3 つのケーラーグラフの組み $G_1\widehat{\Box}H_1, G_2\widehat{\Box}H_2$ と $G_1\widehat{\otimes}H_1, G_2\widehat{\otimes}H_2$ と $G_1\triangleright H_1, G_2\triangleright H_2$ は推移 $(1,1)$-等スペクトルである。
(2) G_1,G_2 が正則で同じ次数を持てば、4 つのケーラーグラフの組み $G_1\widehat{\Box}H_1$, $G_2\widehat{\Box}H_2$ と $G_1\widehat{\boxtimes}H_1, G_2\widehat{\boxtimes}H_2$ と $G_1\widehat{\otimes}H_1, G_2\widehat{\otimes}H_2$ と $G_1\triangleright H_1, G_2\triangleright H_2$ は全て $(1,1)$-等スペクトルである。

等質なケーラーグラフで同型ではないが、$(1,1)$-基本 2 色彩道を辺集合とする (一般には単純ではない) $(1,1)$-誘導グラフは同型になるものが存在する (下図 [4])。従って、$(1,1)$-等スペクトルの定義で主グラフの等スペクトル性の条件を外すと、このようなケーラーグラフも等スペクトルということになる。



なお、今回扱ったケーラーグラフのいくつかについては (p,q)-ラプラシアンについても考察することができ、すべての (p,q) に関して等スペクトルな組が存在する。

参考文献

[1] T. Adachi, *A discrete model for Kähler magnetic fields on a complex hyperbolic space*, in *Trends in Differential Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics*, K. Sekigawa, V.S. Gerdijikov & S. Dimiev eds., World Scientific 2009, 1–9.
[2] A.E. Brouwer & W.H. Haemers, *Spectra of Graphs*, Springer 2012.
[3] H. Fujii & A. Katsuda, *Isospectral graphs and isoperimetric constant*, Discrete math. 207(1999), 33–52.
[4] Yaermaimaiti, T. & T. Adachi, *Vertex-transitive Kähler graphs*, preprint 2013.
[5] Yaermaimaiti, T. & T. Adachi, *Isospectral Kähler graphs*, preprint 2013.
[6] Yaermaimaiti, T. & T. Adachi, *Laplacians for derived graphs of a Kähler graph*, preprint 2013.

466-8555 名古屋市昭和区御器所町, 名古屋工業大学工学研究科 情報工学専攻 情報数理分野
E-mail address: `yarimamat@gmail.com`